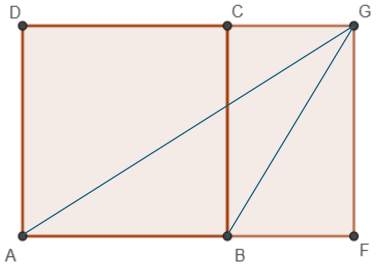
01. O retângulo AFGD da figura abaixo está dividido em dois outros quadriláteros: um quadrado ABCD e um retângulo BFGC semelhante a ele.



a) Encontre a razão entre as diagonais AG e BG.

Solução: Como os retângulos AFGD e BFGC são semelhantes, temos que os triângulos AGD e BGF são semelhantes. Logo $\frac{AG}{BG} = \frac{GD}{GF} = \frac{AD}{BF}$ *· Chamando o lado do quadrado ABCD de* x *e o lado menor do retângulo BFGC de* y*, temos que:*

$$\frac{AG}{BG} = \frac{DG}{GF} = \frac{AD}{BF} \Leftrightarrow \frac{AG}{BG} = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Fazendo $\frac{x}{y} = \phi$*, temos:*

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

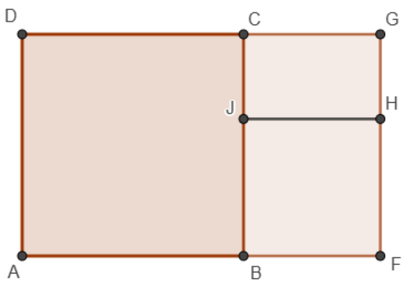
Apenas uma das raízes da equação quadrática responde o problema, que é $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ·

Logo, $\frac{AG}{BG} = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Sejam H e J pontos sobre os segmentos FG e BC de modo que o segmento HJ também divide o retângulo BFGC em um quadrado BFHJ e um retângulo HGCJ. Mostre que a razão entre as áreas de BFHJ e HGCJ é a mesma entre as diagonais AG e BG do item anterior.

Solução:

O quadrado BFHJ tem lado y *e o lado menor do retângulo HGCJ tem lado* $(x-y)$*. A razão entre suas áreas é* $\frac{y^2}{y\cdot(x-y)} = \frac{y}{x-y}$ ·



Mas, $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{x+y-x}{x} = \frac{x-y}{y} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x-y}{y}$

Logo, $\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

02. Em um jogo de apostas, um jogador deve girar uma roleta, não viciada, dividida em 3 setores circulares idênticos como na figura abaixo. O jogador paga R$10,00 para girar a roleta. Se acertar no setor "Gire Outra Vez", o jogador tem direito a girar a roleta novamente. Se acertar em qualquer dos outros dois setores, o jogo termina.

Valor da aposta: R$ 10,00

a) Qual a probabilidade de o jogo terminar apenas no 3° giro da roleta?

<u>Solução</u>: *Para que o jogo termine apenas no 3° giro é preciso que o jogador acerte os dois primeiros giros em "Gire Outra Vez" e no 3° giro acerte em "Ganha R$ 20,00" ou "Perde o jogo".*

Assim, a probabilidade P solicitada é:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

b) Qual a probabilidade de o jogador perder o jogo?

<u>Solução</u>: *O jogador perde o jogo apenas quando acerta em "Perde o jogo" em algum giro da roleta. Isto pode acontecer no 1° giro* ***<u>ou</u>*** *não acontecer no 1°* ***e*** *acontecer no 2°* ***<u>ou</u>*** *não acontecer no 1° giro* ***e*** *não acontecer no 2° giro* ***e*** *acontecer no 3° giro* ***ou ....***

Logo, a probabilidade P solicitada é:

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \cdots$$

Note que P é a soma de uma P.G. infinita com razão e primeiro termo iguais a $\frac{1}{3}$.

Logo:

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

c) Mostre que a probabilidade de o jogo acabar, em algum momento, é 100%.

<u>Solução</u>: *Seja P a probabilidade de o jogo acabar em algum giro da roleta. Usando raciocínio análogo ao do item anterior, temos:*

$$P = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \cdots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$